Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Prof. Dr. Erich Miersemann

Übungen zur Vorlesung **Partielle Differentialgleichungen I**, WS 08/09

Blatt 1. Abgabe: Donnerstag (23. 10.) vor der Vorlesung.

Aufgabe 1:

Bestimme nichttriviale Lösungen u der Gleichung

$$u_x y - u_y x = 0 \ .$$

Tipp: Siehe Beispiel 5 aus der Vorlesung.

Aufgabe 2:

Zeige, daß es im $\mathbb{R}^2$ unendlich viele linear unabhängige (im Vektorraum $C^2(\mathbb{R}^2)$ Lösungen von $\triangle u = 0$ gibt.

Tipp: Für eine holomorphe Funktion f gilt: $\triangle(Ref) = \triangle(Imf) \equiv 0$.

Aufgabe 3:

Bestimme alle radialsymmetrischen harmonischen Funktionen u, d.h. $\triangle u = 0$ im $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ für $n \geq 2$. Dabei heißt u radialsymmetrisch, falls $u(x) = f(r)$ mit $r = (\sum_i^n x_i^2)^{1/2}$.

Tipp: Zeige zunächst für beliebiges radialsymmetrisches u, daß gilt $\triangle u = r^{1-n}\partial_r(r^{n-1}\partial_r f)$. Benutze dabei: $\nabla u(x) = f'(r)\frac{x}{r}$.

Aufgabe 4:

Beweise das Fundamentallemma der Variationsrechnung: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^0(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega f(x)h(x)\ dx = 0$$

für alle $h \in C_0^2(\Omega)$. Dann gilt $f = 0$.

Tipp: Konstruiere ein geeignetes h.