Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Prof. Dr. Erich Miersemann

Übungen zur Vorlesung **Partielle Differentialgleichungen I**, WS 08/09

Blatt 2. Abgabe: Donnerstag (30. 10.) vor der Vorlesung.

Aufgabe 1:

Aufgabe 1:

Es sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ Lösung von

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u_{x_i}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) &= C = const. \text{ in } \Omega \\ \frac{\partial u/\partial n}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} &= \cos\gamma \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Zeige

$$C = \frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|} \cos\gamma\ .$$

Dabei ist $|\partial\Omega| = \int_{\partial\Omega}\ 1\ dS$ die Länge des Randes, $|\Omega| = \int_\Omega\ 1\ dx$ die Fläche von Ω und ν die äußere Normale an den Rand von Ω.

Tipp: Integriere die Differentialgleichung über Ω.

Aufgabe 2:

Bestimme eine rotationssymmetrische Lösung w der Aufgabe 1, d. h., $u(x) \equiv w(r),\ r = |x|$, und $w(r)$ ist Lösung von

$$\begin{aligned} \left(\frac{rw'}{\sqrt{1+w'^2}} \right)' &= rC, \quad 0 < r < R \\ \frac{w'}{\sqrt{1+w'^2}} &= \cos\gamma, \quad r = R. \end{aligned}$$

Aufgabe 3:

Zeige, dass $\mathrm{d}iv(\nabla u/\sqrt{1+|\nabla u|^2})$ gleich der doppelten mittleren Krümmung der durch $z = u(x_1, x_2)$ definierten Fläche ist.

Aufgabe 4:

Es sei u eine Lösung der Gleichung

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0 \text{ für } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Zeige, dass für beliebiges $H \in C^1$, $H:\ \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, auch $H(u)$ eine Lösung ist und dass aus $H(u) = c$ folgt $u(x,y) = const.$, wenn $H'(s) \neq 0$ gilt und c im Wertebereich von H liegt.