Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Prof. Dr. Erich Miersemann

Übungen zur Vorlesung **Partielle Differentialgleichungen I**, WS 08/09

Blatt 5. Abgabe: Donnerstag (20. 11.) vor der Vorlesung.

Aufgabe 1:

Bestimme eine nichtkonstante Lösung von

$$u_x + u_y = 0 \ ,$$

die die Gerade $(0, 0, 1)^T + s(1, 1, 0)^T, \ -\infty < s < +\infty$ enthält.

Aufgabe 2:

Bestimme die Länge der Halbachsen der durch

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon^2 \sin(\theta - \theta_0)}, \ 0 \le \varepsilon < 1,$$

definierten Ellipse.

Aufgabe 3:

Bestimme die Hamiltonfunktion der Hamilton-Jacobi-Bellmanschen Differentialgleichung wenn $h = 0$ und $f = Ax + B\alpha$. Dabei sind $A, \ B$ konstante reelle Matrizen, $A : \ \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$, B ist eine orthogonale $n \times n$-Matrix, $p \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Der Steuerbereich ist

$$U = \{\alpha \in \mathbb{R}^n : \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \le 1\} \ .$$

Hinweis. Die Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung ist formal die Hamilton-Jacobi Gleichung $u_t + H(x, \nabla u) = 0$, wobei die Hamilton Funktion definiert ist durch

$$H(x, p) := \min_{\alpha \in U} \left(f(x, \alpha) \cdot p + h(x, \alpha) \right) ,$$

$f(x, \alpha)$ und $h(x, \alpha)$ sind gegeben. Vgl. z. B. L. C. Evans: Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics , Vol. 19, AMS, Providence, 1991, Chapter 10.

Aufgabe 4:

Es sei χ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in C^1. Zeige, dass es für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ in einer Umgebung um x_0 eine lokale Koordinatentransformation $\Phi : \ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$ gibt mit den Eigenschaften: a) Φ ist lokaler Diffeomorphismus, (b) $\lambda_n(x) = \chi(x)$ und c) $\chi(x(\lambda)) = \lambda_n$.