Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Prof. Dr. Erich Miersemann

Übungen zur Vorlesung **Partielle Differenzialgleichungen I**, WS 08/09

Blatt 6. Abgabe: Donnerstag (27. 11.) vor der Vorlesung.

Aufgabe 1:

Zeige, dass die Differenzialgleichung

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + \text{Terme niederer Ordnung} = 0$$

elliptisch ist, falls $ac - b^2 > 0$ ist, und sie ist hyperbolisch wenn $ac - b^2 < 0$ gilt.

Aufgabe 2:

Bestimme den Typ der Differenzialgleichung

$$Lu := 2u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0$$

und transformiere diese Gleichung mittels Hauptachsentransformation, $x = Uy$, U orthogonal, so dass die gemischten Ableitungen verschwinden.

Tipp: Sind die Koeffizienten a_{ik} konstant und gilt $a_{ik} = a_{ki}$, dann ist $\sum a_{ik}u_{x_ix_k} = \sum c_{jl}v_{y_jy_l}$. Dabei sind c_{jl} die Matrixelemente von U^TAU and $v(y) := u(Uy)$.

Aufgabe 3:

Bestimme den Typ der folgenden Differenzialgleichung im Punkt $(x,y) = (1, 1/2)$:

$$Lu := xu_{xx} + 2yu_{xy} + 2xyu_{yy} = 0.$$

Aufgabe 4:

Zeige, dass

$$\lambda = \frac{1}{(1+|p|^2)^{3/2}}, \quad \Lambda = \frac{1}{(1+|p|^2)^{1/2}}.$$

der kleinste bzw. der größte Eigenwert der Matrix (a_{ij}), definiert durch

$$a_{ij}(p) = \left(1+|p|^2\right)^{-1/2}\left(\delta_{ij} - \frac{p_ip_j}{1+|p|^2}\right),$$

ist.