Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Prof. Dr. Erich Miersemann

Übungen zur Vorlesung **Partielle Differenzialgleichungen I**, WS 08/09

Blatt 10. Abgabe: Donnerstag (14. 1.) vor der Vorlesung.

Aufgabe 1:

Bestimme Lösungen der Telegrafengleichung

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \lambda^2 u,\ \lambda = const.$$

in der Form

$$u(x,t) = f(x^2 - c^2t^2) = f(s),\ s := x^2 - c^2t^2$$

mit $f(0) = K$.

Tipp: Transformiere die Gleichung für $f(s)$ mittels der Substitution $s := z^2/A$ mit einer passenden Konstanten A in die Besselsche Differentialgleichung

$$z^2 g''(z) + z g'(z) + (z^2 - n^2) g(z) = 0,\ z > 0,\ g(z) := f(z^2/A),$$

mit $n = 0$. Benutze ohne Beweis Aussagen über Besselfunktionen (vgl. z.B. Bücher über gewöhnliche Differentialgleichungen oder Handbücher): $J_0(z)$ ist beschränkte Lösung der Besselschen Differentialgleichung mit $n = 0$ und es gilt $J_0(0) = 1$.

Aufgabe 2:

a) Zeige, dass

$$u(x,t) := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} t\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$$

C^2-Lösung der Wellengleichung $u_{tt} = u_{xx}$ ist, wenn gilt $|\alpha_n| \le c/n^4$ mit einer von n unabhängigen Konstanten c.

b) Zeige, dass für

$$\alpha_n := \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)\ dx$$

gilt $|\alpha_n| \le c/n^4$, wenn $f \in C_0^4(0,l)$.

Aufgabe 3:

Es sei Ω das zweidimensionale Gebiet $(0,a) \times (0,b)$. Bestimme mittels Trennung der Veränderlichen Eigenwerte und zugehörige Eigenfunktionen von $-\triangle u = \lambda u$ in Ω, $u = 0$ auf $\partial\Omega$.

Aufgabe 4:

Bestimme mittels Fouriermethode (Trennung der Veränderlichen) eine Lösung der Schrödingergleichung

$$i\hbar\psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle_x\psi + V(x)\psi \quad \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

unter der Nebenbedingung

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x,t)|^2 dx = 1 \ ,$$

$\psi:\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, $\hbar$ Plancksches Wirkungsquantum (kleine positive Konstante), $V(x)$ gegeben (Potential), wenn $E \in \mathbb{R}$ (Eigenwert) der elliptischen Gleichung

$$\triangle u + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))u = 0 \quad \text{in} \ \ \mathbb{R}^n$$

mit $\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx = 1$ genügt. Dabei ist $u:\ \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$.

Bemerkung. Falls $V(x) = -e/|x|$, e positive Konstante (Wasserstoffatom), dann sind $E_n = -me^4/(2\hbar^2 n^2)$, $n \in \mathbb{N}$, Eigenwerte, vgl. A. Sommerfeld, Partielle Differentialgleichungen der Physik, S. 202 ff.